Asociación Argentina de Astronomía
BAAA, Vol. 47, 2004
P. Cincotta, G. Dubner, S. Malaroda, C.H. Mandrini, H. Muriel, G.E. Romero y R. Vázquez, eds.

INFORME DE TRABAJO – WORK IN PROGRESS

Órbitas periódicas en el problema de los tres cuerpos

Silvia Fernández[1] y Jacobo Gámez[2]
[1] *Observatorio Astronómico de Córdoba, Argentina.*
silvia@oac.uncor.edu
[2] *Observatorio Astronómico de Suyapa, Honduras*

Abstract. In order to investigate the possible existence of small planets in extrasolar systems, a restricted, circular and plane three body problem is used. One of the two primaries has a mass similar to the Sun and the other one has a mass greater than Jupiter. Periodic and quasi-periodic orbits for the third body with different values of the Jacobi constant (C) are found by numerical methods. One of the three cases studied is fictitious, the others resemble two real systems of ext rasolar planets. The Everhart method is used and the results show the existence of periodic and quasi-periodic orbits for the lesser value of C. Irregular orbits appear for the other values of C, specially on the exterior zone of the secondary body.

Resumen. Para estudiar la posible existencia de planetas de dimensiones menores en los sistemas extrasolares, se plantea un modelo de tres cuerpos, restringido y circular, donde uno de los primarios posee una masa similar a la del Sol y el segundo tiene una masa mayor que la de Júpiter. Mediante métodos numéricos se encuentran soluciones periódicas y cuasiperiódicas para el tercer cuerpo de masa nula para distintos valores de la constante de Jacobi. De los tres casos estudiados, uno es ficticio y los otros dos se asemejan a sistemas reales de planetas extrasolares. Las integraciones se realizan con el metodo de Everhart y los resultados muestran la existencia de órbitas periódicas y cuasi periódicas en todos los sistemas, para el menor valor de C. Para los otros dos valores de la Constante de Jacobi, se encuentran órbitas irregulares principalmente en la zona exterior al secundario, es decir hacia valores mayores de X en las condiciones iniciales.

1. Introducción

La evolución temporal de un sistema de cuerpos planetarios puede ser estudiada empleando métodos numéricos con la precaución de considerar intervalos finitos de tiempo, ya que se pueden presentar inconvenientes en el tratamiento de las ecuaciones cuando t tiende a infinito. Por eso es interesante el análisis de la evolución de los cuerpos que integran el sistema mediante el estudio de las superficies de sección de Poincaré. De esta manera, en vez de considerar la trayectoria completa en el espacio de fases, se obtienen las intersecciones sucesivas de la misma con una cierta superficie llamada "superficie de sección". Esta imagen, que se puede generar mediante una integración numérica, proporciona una idea de las propiedades de la trayectoria relacionadas con su periodicidad.

El estudio de las órbitas periódicas en un sistema dinámico permite conocer propiedades de la solución, que de otra manera sería más difícil de detectar. Dentro de ese esquema de trabajo, es posible investigar sobre la existencia y tipo de soluciones que puede presentar el Problema de Tres Cuerpos Restringido (P3CR) aplicado a sistemas de tipo planetario.
La intención de esta investigación es encontrar soluciones para un sistema compuesto por una estrella de masa similar a la del Sol, un planeta de masa mayor que la de Júpiter y un cuerpo de masa infinitesimal. Para ello se utiliza el formalismo del P3CR y se encuentran numéricamente las superficies de sección correspondientes a las órbitas de la partícula, la cual representa a un planeta de masa infinitesimal comparada con los dos primarios.

2. Métodos y Ecuaciones

De los cuerpos que integran el sistema, los dos primarios giran en una órbita circular alrededor del centro de masa de ambos, el cual será el origen del sistema de referencia rotante. La unidad de masa es la suma de las masas de los primarios, la de longitud es su distancia mutua. La unidad de tiempo es tal que la velocidad angular es igual a la unidad. Esto conduce a que la constante de gravedad sea también igual a 1.
Se designa por μ, la masa del secundario y por $(1-\mu)$ la de la estrella. Planteadas las ecuaciones de movimiento para la partícula en ese sistema rotante solidario con los dos cuerpos finitos, se puede obtener una integral llamada constante de Jacobi (C).

$$C = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \tag{1}$$

Para aplicar el método de Poincaré, debemos considerar que las soluciones de las ecuaciones de movimiento pueden ser representadas por trayectorias en el espacio de fases de 4 dimensiones $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Dando un valor a la constante C y conociendo tres de las coordenadas, por ejemplo $x, y, \dot{x}$, se puede deducir la cuarta, $\dot{y}$. Eso permite representar la trayectoria en un espacio de tres dimensiones solamente.
En la práctica, esto se consiguió haciendo partir la partícula de masa nula desde un punto sobre el eje x, con velocidad perpendicular al mismo. Esto significa $y = 0$; $\dot{x} = 0$.
Se integraron las ecuaciones de movimiento del PR3C utilizando el método de Everhart y se obtuvieron las sucesivas intersecciones de la trayectoria con el eje x , es decir cada vez que $y = 0$, $\dot{y} < 0$. Cada una de estas intersecciones puede ser representada por un punto en un plano $(x, \dot{x})$.
Una de las ventajas de este método es que permite una representación más concisa de los resultados, ya que en lugar de tener una figura diferente para cada órbita, es posible representar en una sola figura una serie de órbitas para un mismo valor de la constante C.
Para calcular los valores de x e $\dot{y}$ en el instante inicial se generó una distribución de puntos a intervalos regulares, situados a ambos lados de cada punto colineal lagrangiano.

3. Casos Analizados

De los sistemas observados que aparecen en la página exoplanet.org, actualizado a marzo 2004, se seleccionaron dos casos reales que cumplen las siguientes cond iciones:

- baja excentricidad de la órbita del secundario
- masa del secundario del orden de 5 MJ

Se requiere baja excentricidad para minimizar la diferencia con el modelo en estudio, el cual considera órbita circular.

1. Tau Boo ; M = 4.14 MJ ; e= 0.01
2. HD28185 ; M = 5.7 MJ ; e= 0.07

A los dos sistemas encontrados se agregó un tercero, ficticio, con excentricidad cero y masa del secundario igual a 10 masas de Júpiter.

3. Sistema ficticio M= 10.0 MJ ; e= 0.0

A fin de detectar posibles diferencias en el comportamiento de la partícula infinitesimal, cada sistema fue estudiado para tres valores de la constante C.

C1 = 3.02
C2 = 3.50
C3 = 4.50

Se calcularon las posiciones relativas de los puntos lagrangianos L1, L2, L3 para los tres sistemas considerados.

4. Resultados

Los resultados obtenidos se analizaron en forma gráfica según los siguientes criterios:

Las órbitas periódicas ocurren cuando se obtiene un punto en el plano $(x, \dot{x})$.
Si es una órbita multiplemente periódica, de multiplicidad p, habrá una serie de puntos que se repite con un cierto período (p). En ese caso se notará la existencia de pequeñas curvas cerradas o islas que van formando una curva alrededor de la órbita periódica.
Las órbitas cuasiperiódicas producen una serie infinita de puntos pero formando una curva cerrada alrededor de la órbita periódica.
Para algunos valores de Condiciones Iniciales se ha encontrado que los puntos de intersección correspondientes a una misma órbita, tienden a cubrir toda la superficie sin que sea posible pasar una curva por ellos. En ese caso, la órbita correspondiente es extremadamente compleja y no presenta ninguna regularidad.

5. Conclusiones

En este primer estudio, de carácter puramente numérico, se ha detectado la existencia de órbitas periódicas y cuasiperiódicas en todos los sistemas, para el menor valor de C.
Para los otros dos valores de la Constante de Jacobi, además de las órbitas periódicas, se han encontrado órbitas irregulares principalmente en la zona exterior al secundario, es decir, hacia mayores valores de la coordenada x.
En investigaciones posteriores, se estudiará la posibilidad de existencia de órbitas periódicas, pero en un planteo de Tres Cuerpos Restringido Elíptico.